

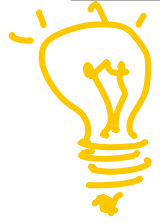
Infos: Retour sur l'évaluation du cours.

Rappels:

- Une sous-suite $(x_{n_k}) \subseteq (x_n)$, est la donnée d'une suite d'indices $n_k \in \mathbb{N}$ tq $\forall k, n_{k+1} > n_k$.
- $\lambda \in \mathbb{R}$ est un point d'accumulation de (x_n) si $\exists (x_{n_k}) \subseteq (x_n)$ tq $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \lambda$
- Pour une suite bornée,
 $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$ = plus grand point d'accumulation de (x_n)
 = la plus grande valeur de la suite à l'infini
 $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$ = plus petit point d'accumulation de (x_n)
 = la plus petite valeur de la suite à l'infini.

On va toujours travailler avec des suites qui ont un nombre fini de points d'accumulation. Ça n'est pas vrai en général: si $x_n = \sin(n)$, l'ensemble des points d'accumulation de (x_n) est $[-1, 1]$

Exemple 3.38 (calculer $\limsup$ & $\liminf$)



Décomposer notre suite en un nombre fini de sous-suites convergentes.

⚠ les sous-suites doivent couvrir toute la suite.

(i) Soit

$$x_n = \begin{cases} \frac{n^2}{2n^2+1} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \left(\frac{n}{n+1} - 1\right) \cos(n^2) & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

La sous-suite des termes pairs: $n_k = 2k$

$$x_{n_k} = x_{2k} = \frac{4k^2}{8k^2+1} = \frac{\cancel{k^2}}{\cancel{k}} \frac{4}{8 + 1/k^2} \longrightarrow \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

La sous-suite des termes impairs: $n_k = 2k+1$

$$x_{n_k} = \underbrace{\left(\frac{2k+1}{2k+2} - 1\right)}_{\rightarrow 0} \underbrace{\cos((2k+1)^2)}_{\text{borné}}$$

$$|x_{n_k} - 0| = \left(\frac{2k+1}{2k+2} - 1 \right) \underbrace{|\cos((2k+1)^2)|}_{\leq 1} \leq \underbrace{\left| \frac{2k+1}{2k+2} - 1 \right|}_{\leq 1}$$

Vu que $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$, par le corollaire du critère q_k des 2 gendarmes,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = 0. \quad \left| \frac{2k+1}{2k+2} - 1 \right| = \left| \frac{1}{2} \frac{2 + \frac{1}{k}}{2 + \frac{2}{k}} - 1 \right| \rightarrow \left| \frac{1}{2} - 1 \right| = 0$$

Vu que la sous-suite des pairs & la sous-suite des impairs couvrent la suite en entier, on a

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \max \left\{ 0, \frac{1}{2} \right\} = \frac{1}{2}$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \min \left\{ 0, \frac{1}{2} \right\} = 0$$

$$(ii) x_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$$

$$\text{La sous-suite des pairs: } x_{2k} = (-1)^{2k} \frac{2k}{2k+1}$$

$$= \frac{2k}{2k+1} \rightarrow \frac{2}{2} = 1$$

$$\cos\left(\frac{2\pi}{n} \cdot n\right)$$

$$(-1)^n \rightarrow \begin{cases} 2k \\ 2k+1 \end{cases}$$

$$\sin\left(\frac{2\pi}{n} \cdot n\right) \rightarrow \begin{matrix} n \cdot k \\ n \cdot k + 1 \end{matrix}$$

$$n \cdot k + 2$$

$$\vdots \\ n \cdot k + n - 1$$

La sous-suite des impairs:

$$x_{2k+1} = (-1)^{2k+1} \frac{2k+1}{2k+2} = -\frac{2k+1}{2k+2} \rightarrow -1.$$

Vu que la sous-suite des pairs et impairs couvrent la suite en entier,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \max \{-1, 1\} = 1$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \min \{-1, 1\} = -1$$

(iv) Soit $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right) \rightarrow (x_{3k}, (x_{3k+1}, (x_{3k+2})$

$$x_{3k} = \left(1 + \frac{1}{3k}\right) \cdot \sin\left(\frac{6k\pi}{3}\right) = \left(1 + \frac{1}{3k}\right) \cdot \sin(2\pi) = 0 \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned} x_{3k+1} &= \left(1 + \frac{1}{3k+1}\right) \cdot \sin\left(\frac{6k\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) = \left(1 + \frac{1}{3k+1}\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right) \\ &= \left(1 + \frac{1}{3k+1}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

$$x_{3k+2} = \left(1 + \frac{1}{3k+2}\right) \underbrace{\sin\left(\frac{6k\pi}{3} + \frac{4\pi}{3}\right)}_{\sin(4\pi/3) = -\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\left(1 + \frac{1}{3k+2}\right) \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow -1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Vue que les trois sous-suites convergent la suite en entier, on a

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \max \left\{ -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2} \right\} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \min \left\{ -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2} \right\} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

§ 3.5 Séries

Définition 3.40 Série

Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite. La série des (a_n) est la suite $(S_n)_{n \geq 0}$ définie par

$$S_n = \sum_{k=0}^n a_k$$

un terme S_n de la suite (S_n) est appelé une somme partielle,
 a_k est appelé le terme général de la série.

Si (S_n) converge, on voit sa limite (qu'on appelle la valeur de la série)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k$$

On écrit $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ pour faire référence à cette limite ou à la
série

On dit que la série converge absolument si elle est absolument convergente si $\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|$ converge.

→ Ex 11 série 5

Remarque 3.41:

- (i) Si a_k change de signe un nombre fini de fois, convergence et convergence absolue sont équivalentes.
- (ii) Lorsqu'on s'intéresse à la convergence absolue, on s'intéresse à la convergence d'une suite croissante:
- $$\sum_{k=0}^{n+1} |a_k| = \sum_{k=0}^n |a_k| + \underbrace{|a_{n+1}|}_{\geq 0} \geq \sum_{k=0}^n |a_k|$$

Il suffit donc de montrer que la suite des sommes partielles $\sum_{k=0}^n |a_k|$ est majorée pour avoir convergence absolue.

Exemple 3.42: (i) soit $r \geq 0$ et la série géométrique

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k$$

Alors, la série converge pour $0 < r < 1$ et diverge pour $r \geq 1$.

$$\sum_{k=0}^n r^k = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

si $r < 1$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n r^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \underbrace{r^{n+1}}_{\rightarrow 0}}{1 - r} = \frac{1}{1 - r}.$$

si $r \geq 1$.

pour exs thm 3.48, 3.49